MPA S2 algèbre 2015

Responsable : Christine Huyghe

2e partie du Contrôle Continu du 4 mai 2015

Durée 1h30.

Il sera accordé le plus grand soin à la qualité de la rédaction. Sont interdits : les documents, les téléphones portables, les baladeurs, et tout autre objet électronique (calculatrice, ...). Vous pouvez admettre le résultat d'une question afin de traiter les questions suivantes.

1. Première partie

   1- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$. On note

   $$C(A) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid AM - MA = 0\},$$

   $$E(A) = \{P(A) \mid P \in \mathbb{C}[X]\}.$$

   Montrer que $C(A)$ et $E(A)$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{C})$ et que

   $$E(A) \subset C(A).$$

   2- Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On pose $A = \lambda Id$. Calculer $C(A)$.

   3- Montrer que

   $$2 \leq dim(C(A)) \leq n^2.$$

   4- Soient A et B deux matrices semblables de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $C(A)$ et $C(B)$ sont des sous-espaces vectoriels isomorphes.

   5- Pour cette question, on prend $n = 2$, λ, μ deux nombres complexes distincts, et

   $$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

   i. Soit $B \in C(A)$. Montrer que B est diagonale.

   ii. Montrer que $A^2 - (\lambda + \mu)A + \lambda\mu Id = 0$.

   iii. Montrer que $E(A) = C(A)$.

2. Deuxième partie

   Dans cette partie on fixe $n = 3$ et on se place sur le corps des nombres réels $\mathbb{R}$.

1- Soient

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{4}{3} \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

et u l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer une base de $Ker(u)$.

2- Soit $F_1 = Ker(u^2 + Id)$. Montrer que

$$F_1 \bigcap Ker(u) = 0,$$

et que $u(F_1) \subset F_1$.

3- Déterminer une base de $Im(u)$.

4- On donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Montrer que $Im(u) \subset F_1$ et que

$$E = F_1 \bigoplus Ker(u).$$

5- Montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$, tels que A est semblable à une matrice du type

$$B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tels que $a^2 + bc = -1$.

6- Soit $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $v \circ u = u \circ v$. Montrer que $v(Ker(u)) \subset Ker(u)$ et que $v(F_1) \subset F_1$.

7- Montrer que $dim(C(B)) \leq 5$, puis, en utilisant la 3e question de la première partie, que $dim(C(A)) \leq 5$.